Marche aléatoire en milieu aléatoire

BELARDI STÉPHANE ET GABRIEL OLIVIER

1er juillet 2004

Projet n°3

Table des matières

Première partie

Etude initiale

1 Cas du milieu constant

La marche aléatoire est définie comme suit :
$S_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ S_n - 1 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases}$, et ici, p est indépendant de n. Dans ce cas, la probabilité d'aller à gauche ou à droite est indépendante de l'endroit où on se trouve. On a donc affaire à une marche aléatoire classique qui peut être traitée intégralement de manière théorique.

1.1 Question 1 (Théorique)

1.1.1 Expression de S_n sous forme de somme de v.a.i.i.d.[1]

On définit les variables aléatoires $Y_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

On a alors $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p$. De plus, les variables aléatoires Y_n sont indépendantes. Puisque $S_n = \sum_{k=1}^{n}(S_k - S_{k-1}) + S_0$ et $S_0 = 0$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \textit{ avec les } Y_k \textit{ indépendants et identiquement distribués.}$$

1.1.2 Calcul de la limite de $\frac{S_n}{n}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_k) &= \mathbb{E}(Y_1) \text{ , car les } Y_k \text{ sont tous de même loi} \\ &= 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1 \end{aligned}$$

Or, la loi forte des grands nombres assure que la moyenne empirique $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 2p - 1 \textit{ presque sûrement}$$

Confrontons ce résultat avec l'intuition :

- Pour $p > \frac{1}{2}$, on prévoit qu'on se déplacera plus souvent vers les n positifs. On comprend donc bien que $\frac{S_n}{n}$ ait une limite positive.
- Pour $p < \frac{1}{2}$, on comprend également bien que la limite soit négative.
- Enfin, si $p = \frac{1}{2}$, la probabilité de se déplacer vers les n positifs ou négatifs est la même. Etudions ce cas plus précisément.

1.1.3 Cas où $p = \frac{1}{2}$

D'après le *Théorème de la Limite Centrale*, et si on note $g(t)$ la densité de la loi normale :

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0, \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [-M; M]\right) - \int_{-M}^{M} g(t)dt \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Comme $S_n \leqslant n$, on a $\forall M \geqslant \sqrt{n_0}, \forall k \leqslant n_0, P\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}} \in [-M; M]\right) = 1$ ce qui nous donne donc :

[1] **V**ariables **A**léatoires **I**ndépendantes **I**dentiquement **D**istribuées

$$\forall \epsilon > 0, \exists M_0 : \forall M \geqslant M_0, \forall n \in \mathbb{N}, P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [-M;M]\right) \geqslant \int_{-M}^{M} g(t)dt - \frac{\epsilon}{2}$$

En choisissant en outre M_0 tel que :

$$\forall M \geqslant M_0, \int_{-M}^{M} g(t)dt \geqslant 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M_0 : \forall M \geqslant M_0, \forall n \in \mathbb{N}, P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [-M_0;M_0]\right) \geqslant 1 - \epsilon$$

Ce résultat n'est pas le résultat demandé ; se référer à l'annexe E pour une démonstration totale en prenant une hypothèse supplémentaire.

Alors, lorsque $p = \frac{1}{2}$, la progression se fait en $\sqrt{n}$, donc moins rapidement que pour $p \neq \frac{1}{2}$(de l'ordre de n). Cela est conforme à l'intuition que l'on peut en avoir.

1.2 Question 2 (Théorique)

Procédons par disjonction des cas :

– Si $\lim \frac{S_n}{n} > 0$ presque sûrement, $\exists a > 0$ tel que $\mathbb{P}\left(\lim \frac{S_n}{n} = a\right) = 1$. Donc, $\mathbb{P}(S_n \sim_\infty a.n) = 1$. On en conclut que $\mathbb{P}(S_n \longrightarrow \infty) = 1$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > 0 \textit{ presque sûrement}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \textit{ presque sûrement }\right)$$

– De même, on peut montrer que

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < 0 \textit{ presque sûrement}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \textit{ presque sûrement }\right)$$

– Supposons maintenant que $\lim \frac{S_n}{n} = 0$ presque sûrement. Selon la formule établie en 1.1.2, $p = \frac{1}{2}$. Alors, $\sigma(Y_1) = 1$. En appliquant le théorème de la limite centrale, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < 0\right) = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \frac{1}{2}$. Or, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ étant du même signe que S_n, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n < 0) = \frac{1}{2}$. Cela nie la proposition "$\lim S_n = +\infty$ presque sûrement".

En conclusion,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > 0 \textit{ presque sûrement}\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \textit{ presque sûrement }\right)$$

2 Cas du milieu périodique

2.1 Question 3 (Théorique)

Ici, on prend $S_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 & \text{avec la probabilité } p(S_n) \\ S_n - 1 & \text{avec la probabilité } 1 - p(S_n) \end{cases}$, où p est de période 2. Supposons par exemple que $p(2n) = r$ et $p(2n+1) = q$, en prenant bien sûr $r \neq q$.

Soit une suite (S_n) donnée. On définit alors la suite quotient $\overline{S_n} = \frac{S_{2n}}{2}$. $\overline{S_n}$ est bien une suite d'entiers relatifs, car aux temps pairs, S_n est toujours sur un point pair. En distinguant les 4 cas possibles, il apparait que $\overline{S_{n+1}}$ vaut :

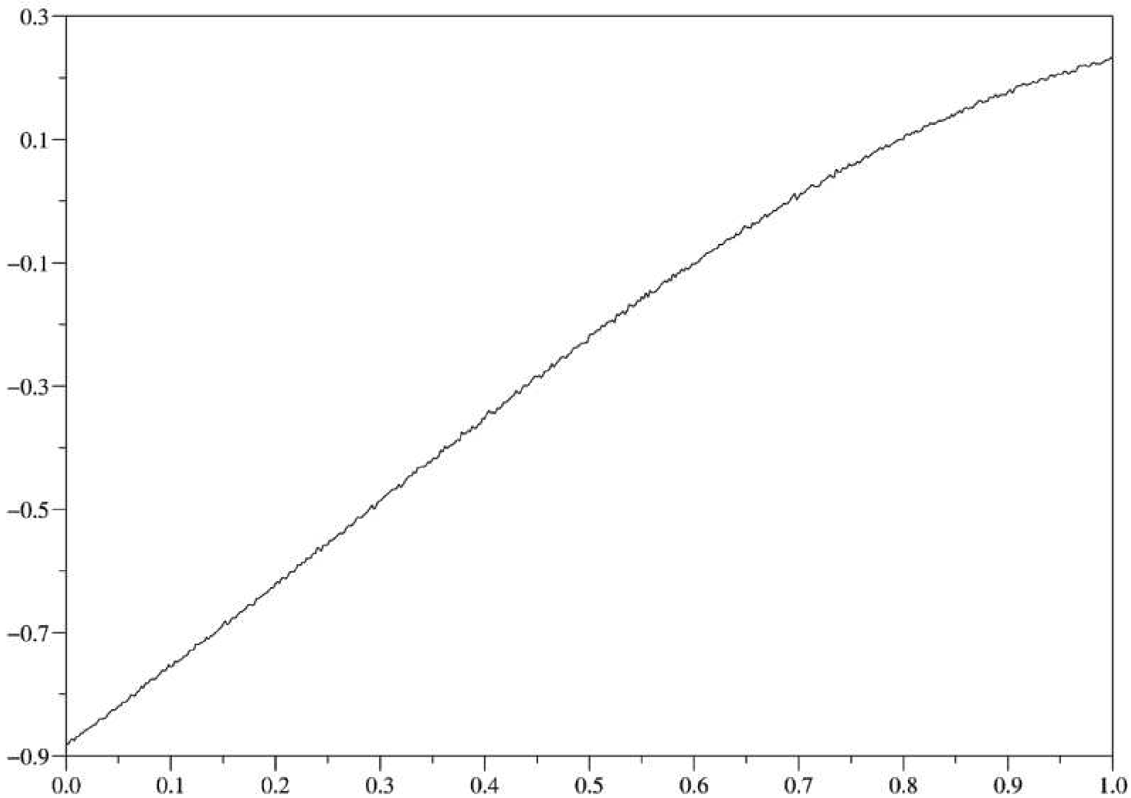
– $\overline{S_n} - 1$ avec probabilité $(1-q)(1-r)$;
– $\overline{S_n}$ avec probabilité $(1-q)r + q(1-r)$;
– $\overline{S_n} + 1$ avec probabilité rq.

et ceci, indépendament de la valeur de la suite (car $\overline{S_{n+1}} - \overline{S_n} = \frac{Y_{2n}+Y_{2n+1}}{2}$, qui sont indépendantes des Y_n précédentes).
On s'est donc ramené au cas précédent, si on autorise en plus le mobile à rester sur place avec une probabilité non nulle. Les résultats précédents qui ne dépendaient que de l'espérance de la variable aléatoire $\overline{Y_n}$(c'est-à-dire tous les résultats sauf ceux du cas particulier $p = \frac{1}{2}$) restent donc valables. [2]

2.2 Question 4 (Simulation)

Ici, on prend $S_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 & \text{avec la probabilité } p(S_n) \\ S_n - 1 & \text{avec la probabilité } 1 - p(S_n) \end{cases}$, où p est de période 3. Supposons par exemple que $p(3n) = 1/6$, $p(3n+1) = r$ et $p(3n+2) = r$. On étudie alors les différents comportements suivant les valeurs de r, avec le logiciel de simulation numérique *SciLab*[3].

Voici le graphe de $\lim \frac{S_n}{n}$ en fonction de r. (En fait, il s'agit de $\frac{S_N}{N}$ où $N = 100000$).



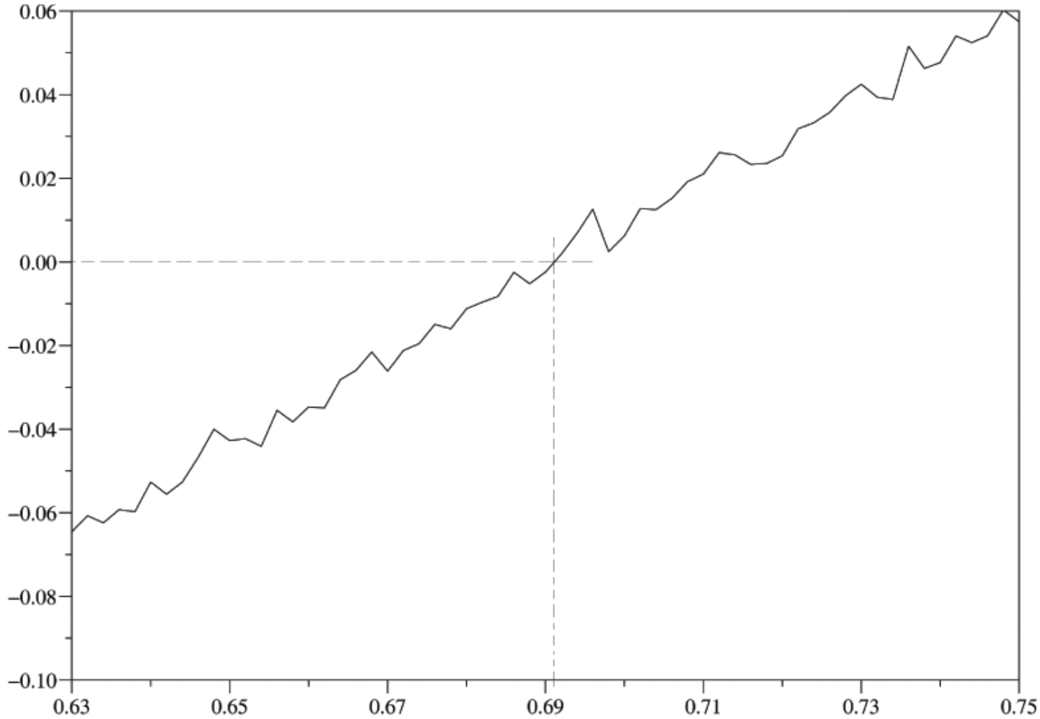
En agrandissant, on voit que pour $r = r_0 \simeq 0.69$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$:[4]

---

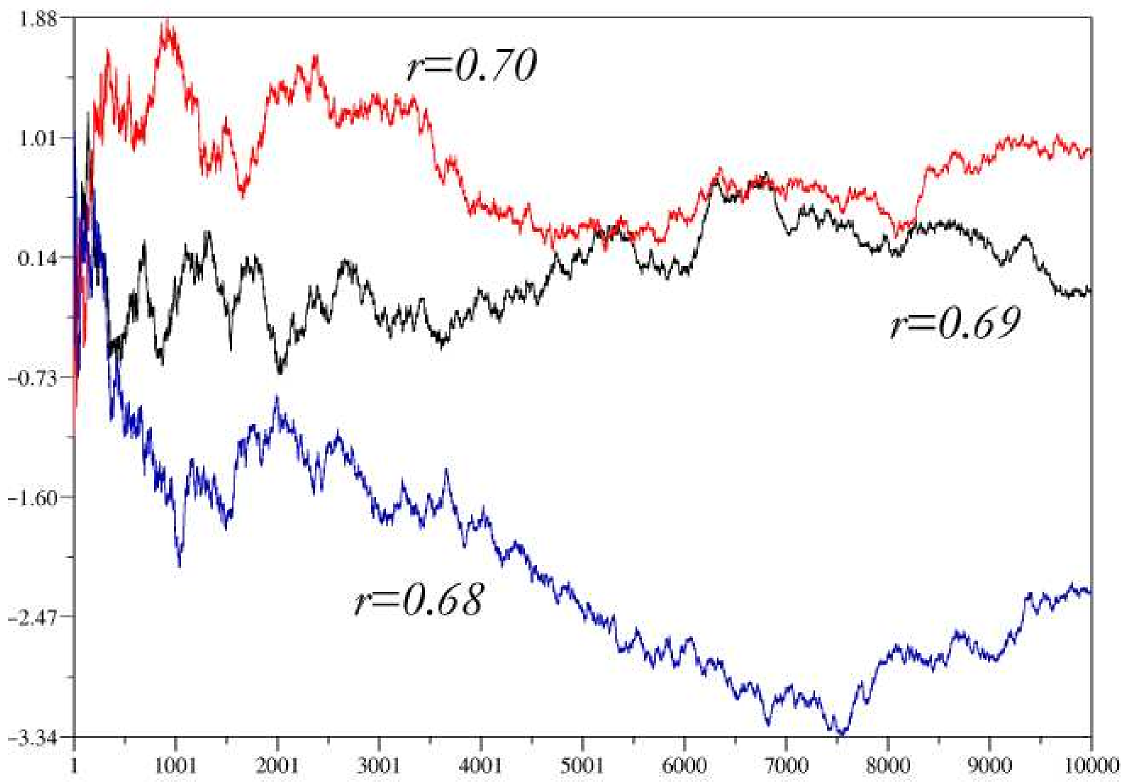
[2] Remarquons que la donnée de $\left(\overline{S_n}\right)_n$ ne permet pas de retrouver $(S_n)_n$ de manière unique, car il existe 2 " chemins " distincts pour obtenir $\frac{S_{2n}}{2} = n$, qui correspondent à $n_0 \to n_0 - 1 \to n_0$ et à $n_0 \to n_0 + 1 \to n_0$.
D'autre part, si on opère un regroupement similaire sur un milieu constant (ce qui revient à faire $q = r = p$ dans les formules précédentes), on obtient également une somme de variables aléatoires indépendantes avec trois valeurs possibles. Cependant, on ne peut pas trouver de p tel que la suite $\left(\overline{S_n}\right)_n$ obtenue suive la même loi qu'une suite $\left(\overline{S_n}\right)_n$ obtenue dans un milieu de période 2, car alors on aurait $p^2 = rq$ (d'après la probabilité de $\overline{Y_n} = 1$) et $r + q = 2p$ ($\overline{Y_n} = 0$ en supposant l'égalité précédente vérifiée). Ainsi, on ne peut pas réduire strictement ce problème au cas précédent par cette méthode.

[3] Se référer à l'annexe A, page 8 pour le code Scilab.

[4] Se référer à l'annexe B, page 10 pour un calcul plus précis de r_0.



Si l'on prend maintenant $r = r_0$, on peut tracer le graphe de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. (On a pris ici r proche de 0.69).



On voit alors que S_n semble être de l'ordre de $\sqrt{n}$ pour $r = r_0$, alors que ce n'est pas le cas si $r \neq r_0$.

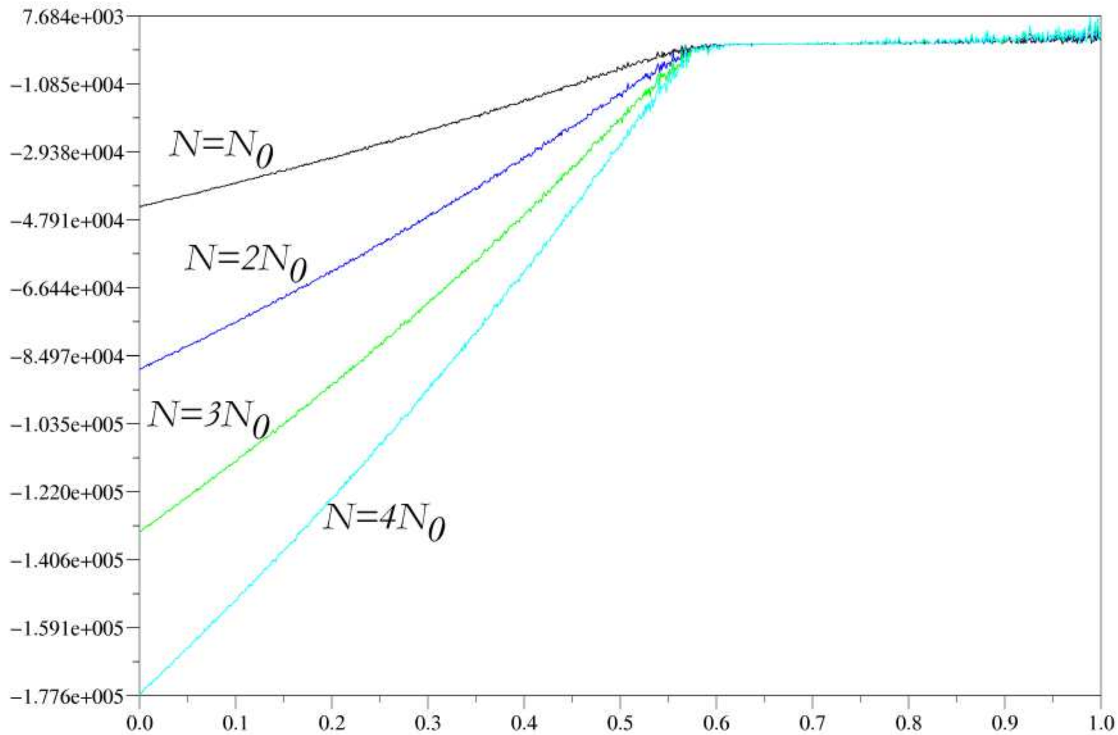
3 Cas du milieu aléatoire

Désormais, on prend $S_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 & \text{avec la probabilité } p(S_n) \\ S_n - 1 & \text{avec la probabilité } 1 - p(S_n) \end{cases}$, où $(p(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On pose donc $0 \leq \alpha, q, r \leq 1$ et on a alors $\mathbb{P}(p(k) = q) = \alpha$ et $\mathbb{P}(p(k) = r) = 1 - \alpha$.

On choisit arbitrairement $q = \frac{1}{6}$ et $\alpha = \frac{\log(2)}{\log(10)}$.

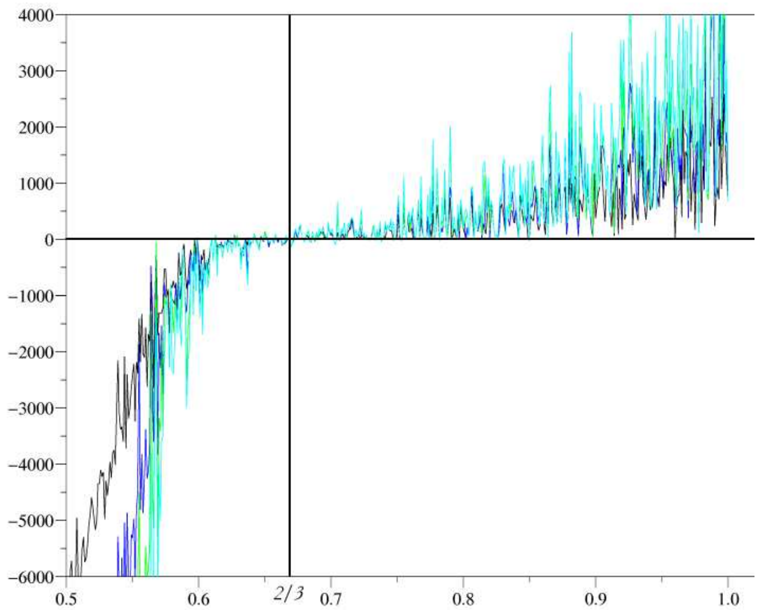
3.1 Question 5 (Simulation)

En traçant les graphes de $\frac{S_N}{N}$ en fonction de r pour N croissant :



on voit bien que[5] lorsque $r \geq \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ presque sûrement, car $\lim_n \frac{S_n}{n} > 0$:

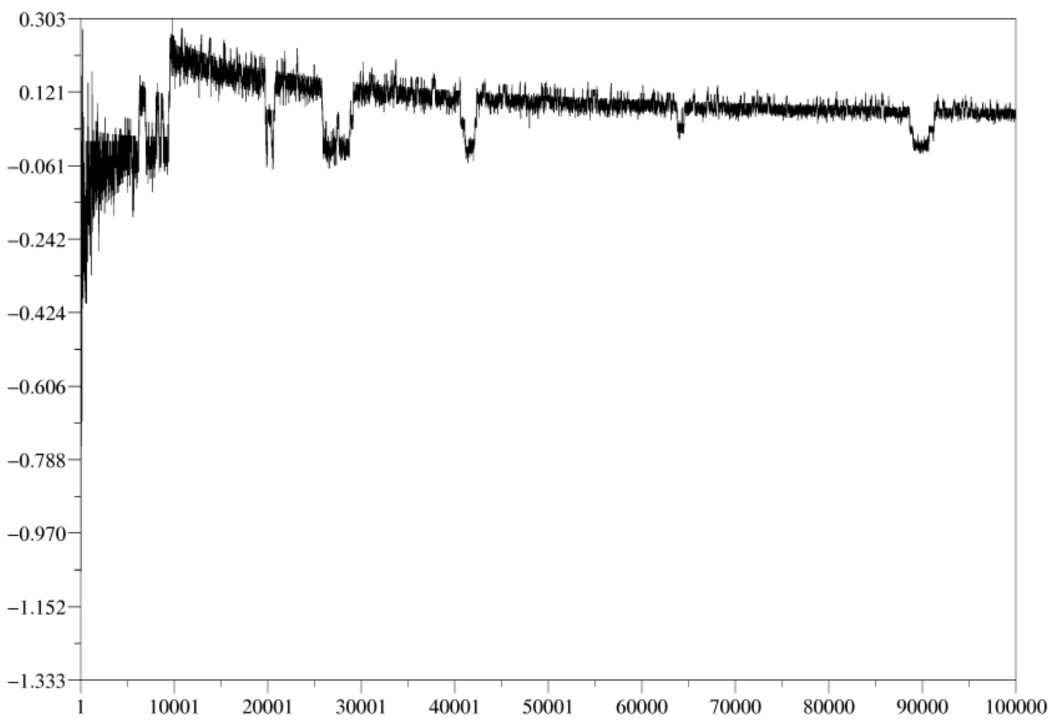
[5] Se référer à l'annexe C, page 11 pour une démonstration rigoureuse de cette limite.



On a pris ici $N_0 = 50000$.

3.2 Question 6 (Simulation)

Traçons $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ pour $r = \frac{2}{3}$.



[6]On voit que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ semble borné ; donc

$$S_n \text{ est de l'ordre de } \sqrt{n} \text{ pour } r = \frac{2}{3}$$

[6]On aperçoit que la courbe adopte un comportement particulier (sauts brusques). Quelques remarques sur le comportement général de ces courbes se trouvent à l'annexe D, page 12.

Deuxième partie
Compléments

A Code SciLab

On a ici l'ensemble des fonctions *SciLab* utilisées dans ce projet, précédées d'un court commentaire.

A.1 Question 4

Renvoie $valeur1$ avec une probabilité p et $valeur2$ avec une probabilité $1-p$

```
function [i] = choix(p, valeur1, valeur2)
  n = rand() ;
  if n <= p then, i = valeur1,
  else, i = valeur2,
  end ;
endfunction ;
```

Renvoie $\frac{S_N}{N}$ avec le paramètre r

```
function [limite] = a_la_limite(N, r)
  s = 0 ;
  for i=1 :N ;
    select modulo(s, 3)
     case 0 p = 1/6
     else p = r
    end ;
  s = s + choix(p, 1, -1) ;
  end ;
limite = s/N ;
endfunction ;
```

Renvoie un vecteur à $nbPoints + 1$ éléments des S_N en faisant varier r de 0 à 1, par pas de $\frac{1}{nbPoints}$

```
function [vecteurL] = grapheR(N, nbPoints)
  vecteurL = zeros(nbPoints+1,1) ;
  for i = 1 :nbPoints+1 ;
    vecteurL(i) = a_la_limite(N, (i-1)/nbPoints) ;
  end ;
endfunction ;
```

Teste la fonction précédente

```
function [] = testR(N, nbPoints)
  plot2d(0 :1/nbPoints :1, grapheR(N, nbPoints))
endfunction ;
```

Calcule $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ pour $n = 1$ à N avec le paramètre r

```
function [vecteurS] = grapheN(N, r)
  vecteurS = zeros(N,1) ;
  s = 0 ;
  for i = 1 :N ;
```

```
    vecteurS(i) = s/sqrt(i) ;
    select modulo(s, 3)
      case 0 p = 1/6
      else p = r
    end ;
   s = s + choix(p, 1, -1) ;
   end ;
endfunction ;
```

Teste la fonction précédente

```
function [] = testN(N, r)
  plot2d(1 :N, grapheN(N, r))
endfunction ;
```

A.2 Question 5

Renvoie un vecteur à $2N+1$ éléments, qui sont les probabilités du "milieu". En fait, on a la correspondance : $p(x) = vecteurP(N+1+x)$. $Alpha$, q, et r sont les paramètres de l'énoncé.

```
function [vecteurP] = genereP(N, alpha, q, r)
  vecteurP = zeros(2*N+1,1) ;
  for i= (-N) :N
    vecteurP(N+1+i) = choix(alpha, q, r) ;
  end ;
endfunction ;
```

Trace le graphe $\frac{S_{N_0}}{N_0}$ en fonction de r, pour $nbPoints$ valeurs de r différentes. 4 valeurs de N_0 sont proposées $N, 2N, 3N, 4N$.

```
function [matriceR] = grapheR2(N, alpha, q, nbPoints)
  matriceR = zeros(nbPoints,4) ;
  for i = 1 :nbPoints
    s = 0 ;
    vecteurP = genereP(4*N, alpha, q, i/nbPoints) ;
    for j=1 :4
      for k = 1 :N
        s = s + choix(vecteurP(4*N+1+s), 1, -1) ;
      end ;
      matriceR(i,j) = s ;
    end ;
  end ;
endfunction ;
```

Teste la fonction précédente

```
function [matriceR] = traceR(N, nbPoints)
  matriceR = grapheR2(N, log(2)/log(10), 1/6, nbPoints) ;
  plot2d(1/nbPoints :1/nbPoints :1, matriceR) ;
endfunction ;
```

A.3 Question 6

Quelques fonctions de bases qui serviront par la suite

```
function [z] = divise(x, y)
  z = x/y ;
endfunction ;
```

```
function [z] = diviseRacine(x, y)
  z = x/sqrt(y) ;
endfunction ;
function [z] = identite(x, y)
  z = x ;
endfunction ;
```

Renvoie un vecteur à N éléments, qui sont les $f(S_n)$ (avec $1 \leq n \leq N$). $vecteurP$ est le vecteur de probabilités créé par la fonction `genereP`.

```
function [vecteurS] = grapheS(N, vecteurP, f)
  vecteurS = zeros(N,1) ;
  s = 0 ;
  for i=1 :N
    vecteurS(i) = f(s,i) ;
    s = s + choix(vecteurP(N+1+s), 1, -1) ;
  end ;
endfunction ;
```

Teste la fonction précédente

```
function [] = testS(N, r, f)
  vecteurP = genereP(N, log(2)/log(10), 1/6, r) ;
  vecteurS = grapheS(N, vecteurP, f) ;
  plot2d(1 :N, vecteurS) ;
endfunction ;
```

On lance alors `testS(N, 0.66666, diviseRacine)` avec N bien choisi.

B Calcul précis de r_0

Pour avoir une valeur plus précise de r_0, on rentre ces fonctions dans *SciLab :*

Renvoie une matrice à $nbPoints + 1$ colonnes, ayant pour valeur $\frac{S_N}{N}$. Chacune des lignes correspond à des valeurs de r différentes (variant de $r_0 - deltaR$ à $r_0 + deltaR$, avec une résolution de $nbPoints + 1$), chacune des colonnes correspond à des simulations différentes pour r fixé.

```
function [mat] = a_la_limite2(N, nbSimul, r0, deltaR, nbPoints)
  mat = zeros(nbPoints+1, nbSimul) ;
  for i=1 :nbPoints+1 ;
    r = r0-deltaR+2*deltaR*(i-1)/nbPoints ;
    for x=1 :nbSimul ;
      mat(i, x) = a_la_limite(N, r) ;
    end ;
  end ;
endfunction ;
```

Renvoie un vecteur à $nbPoints + 1$ éléments, dont le i^{me} indique quel est le pourcentage d'éléments inférieur à eps en valeur absolue sur la i^{me} ligne de mat. (mat doit être absolument de taille $nbPoints + 1$ * $nbSimul$)

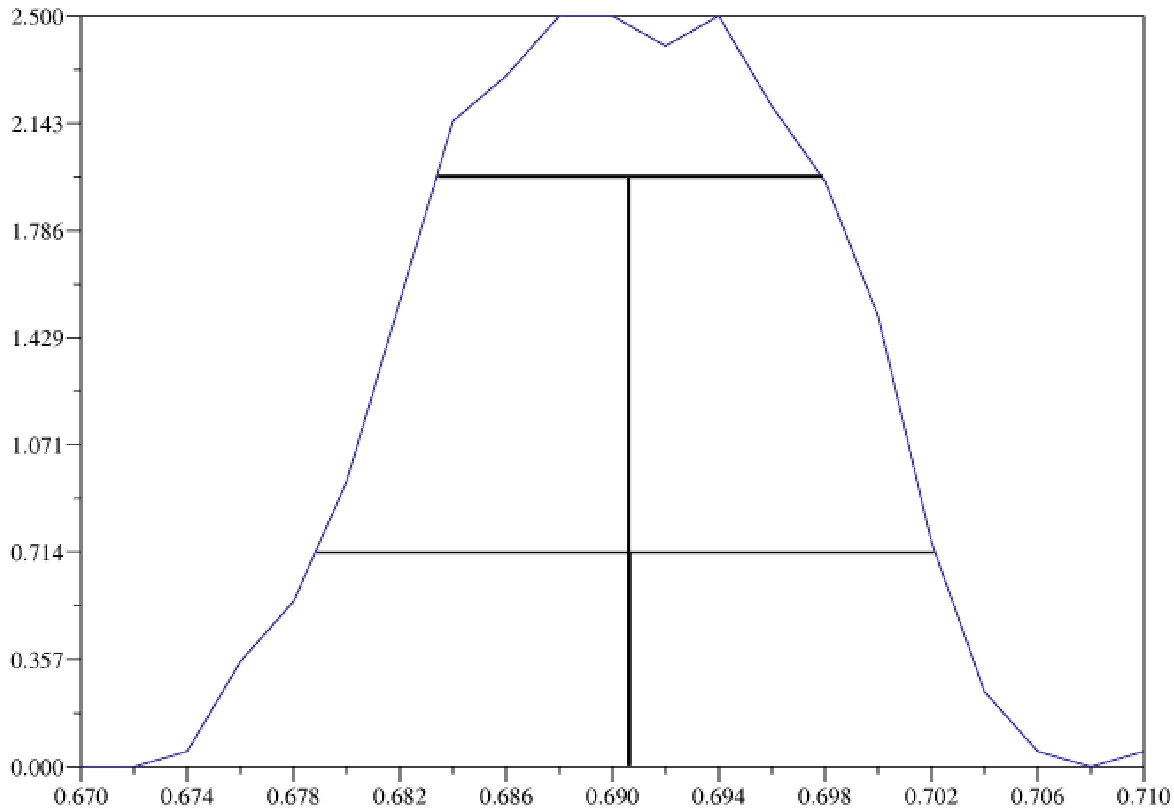
```
function [vecteur] = extrait(mat, eps, nbPoints, nbSimul)
  vecteur = zeros(nbPoints+1,1) ;
  for i = 1 :nbPoints+1 ;
    vecteur(i) = 0 ;
    for j = 1 :nbSimul ;
      if abs(mat(i, j)) < eps then, vecteur(i) = vecteur(i) + 1 ;
      end ;
    end ;
```

```
    vecteur(i) = vecteur(i)/nbSimul ;
    end ;
  endfunction ;
```

Teste la fonction précédente

```
  function[] = test2(N, nbSimul)
    r0 = 0.69 ; nbPoints = 20 ; deltaR = 0.02 ;
    mat = a_la_limite2(N, nbSimul, r0, deltaR, nbPoints)
    abscisse = r0-deltaR :2*deltaR/nbPoints :r0+deltaR ;
    //plot2d(abscisse, extrait(mat, 0.03, nbPoints, nbSimul), style = 5)
    plot2d(abscisse, extrait(mat, 0.01, nbPoints, nbSimul), style = 10)
    //plot2d(abscisse, extrait(mat, 0.003, nbPoints, nbSimul), style = 15)
  endfunction ;
```

En lançant par exemple `test2(100000, 50)`, on obtient la courbe, se rapprochant approximativement d'une gaussienne :



Pour calculer r_0 (qu'on suppose être l'abscisse où la courbe est maximum), on étudie le milieu des abscisses des images réciproques d'une ordonnée fixée. On trouve $r_0 = 0.6905 \pm 0.0005$.

C Démonstration de $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ p.s. dans le cas du milieu aléatoire (et $r = 1$)

C.1 Structure de la suite $p(k)$ obtenue

La suite $p(k)$ obtenue est constituée de successions finies (ou d"'intervalles") de 1 et de $\frac{1}{6}$. En effet, la probabilité d'obtenir une suite infinie de 1 est $\lim_n \alpha^n = 0$. De même, une suite infinie de $\frac{1}{6}$ a une probabilité nulle de se produire.

C.2 Etude de la suite S_n sur un intervalle I (c'est-à-dire une succession) de 1

Dans ce cas, la suite S_n est strictement croissante sur I. On doit également remarquer que les points de valeur 1 se comportent comme des "portes franchissables" uniquement dans le sens croissant.

C.3 Etude sur un intervalle borné I de points de valeur $\frac{1}{6}$

Il suffit alors de déterminer si la suite atteint le point de valeur 1 qui se trouve à droite de I en un temps fini. En effet, si la suite ne l'atteint pas en un temps fini, elle est contrainte de rester dans I, puisque le point de valeur 1 à gauche de I l'empêche de sortir de cet intervalle. Dans le cas opposé, à partir du moment où la suite atteint le 1 à droite, la suite ne peut plus revenir dans l'intervalle I.

C.4 Etude du cas $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$

D'après ci-dessus, l'étude se réduit à l'étude de la suite p suivante :
$p(0) = 1$ et $\forall k > 0, p(k) = \frac{1}{6}$
On définit alors $T_k = \inf \{n | \, S_n = k\}$. T_k représente alors le "premier instant d'arrivée en k". D'après C.3, on a alors

$$\left(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\right) \Longleftrightarrow (\forall k > 0, \mathbb{E}(T_k) < \infty)$$

Prouvons cette dernière propriété par récurrence sur k :
- $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$, car $p(0) = 1$. D'où $\mathbb{E}(T_1) = 1 < \infty$.
- Soit $k > 0$, supposons $\mathbb{E}(T_k) < \infty$. Montrons que $\mathbb{E}(T_{k+1}) < \infty$.
  Soit R_i l'ensemble des suites qui arrivent au moins i fois en k_0 et repartent les i premières fois "à gauche". Il est clair que $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante au sens de l'inclusion. Montrons alors par récurrence que $\mathbb{P}(R_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^i$.
  - $R_0 = \Omega$, d'où $\mathbb{P}(R_0) = 1$, ce qui montre la propriété au rang 0.
  - Si la suite appartient à R_i, alors elle arrive presque sûrement $i+1$ fois en k, car après être "repartie à gauche", elle se trouve à la position $k-1$. Comme $\mathbb{E}(T_k) < \infty$, une suite U_n qui n'est pas passée par k et qui se trouve en $k-1$ va atteindre k au bout d'un temps fini avec probabilité 1. Or, on sait que $(S_n)_n$ possède la propriété de Markov, donc $\mathbb{P}\left(\{S_n \text{ passe } i+1 \text{ fois par } k\} | S_n \in R_i\right) = \mathbb{P}\left(\{U_n \text{ passe } 1 \text{ fois par } k\} | U_0 = k-1\right) = 1$. On a alors $\mathbb{P}(S_n \in R_{i+1}) = \mathbb{P}(S_n \in R_{i+1} | S_n \in R_i) * \mathbb{P}(S_n \in R_i) = \frac{5}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^i$, ce qui montre la propriété au rang $k+1$.

  Il est alors clair que $A = \{S_n \in \Omega | T_k(S_n) = \infty\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, où E_i est l'ensemble des suites de Ω qui ne passent que i fois en k_0 et restent confinées dans $[0; k_0 - 1]$ le reste du temps, et qui est donc un ensemble de mesure nulle d'après précédemment. Comme les R_i sont décroissantes pour l'inclusion, on a $\mathbb{P}(A) = 0$, et donc $\mathbb{E}(T_{k+1}) < \infty$.

D'où, $\forall k, \mathbb{E}(T_k) < \infty$, ce qui achève la démonstration.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

D Remarque sur le comportement général de S_n en fonction de $k \mapsto p(k)$

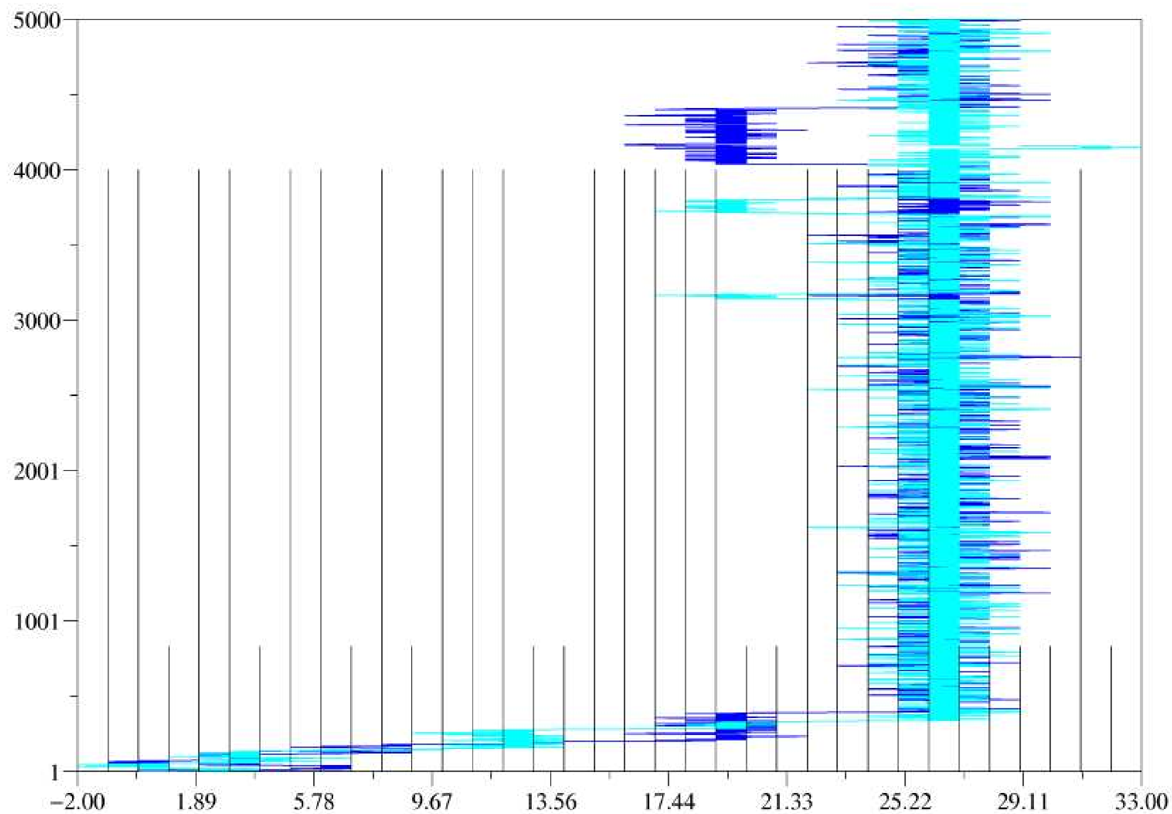
En utilisant la fonction suivante,

```
function [] = testBeSt(N, r)
  vecteurP = genereP(N, log(2)/log(10), 1/6, r);
  maxime = 0; minime = N;
  for i=1 :2
    vecteurS = grapheS(N, vecteurP, identite);
    plot2d(vecteurS, 1 :N, style = 2*i);
    minime = min(min(vecteurS), minime);
    maxime = maxi(max(vecteurS), maxime);
  end;
  tmp = vecteurP((N+1+minime) :(N+1+maxime));
  plot2d3(minime :maxime, 5e3 *tmp);
endfunction;
```

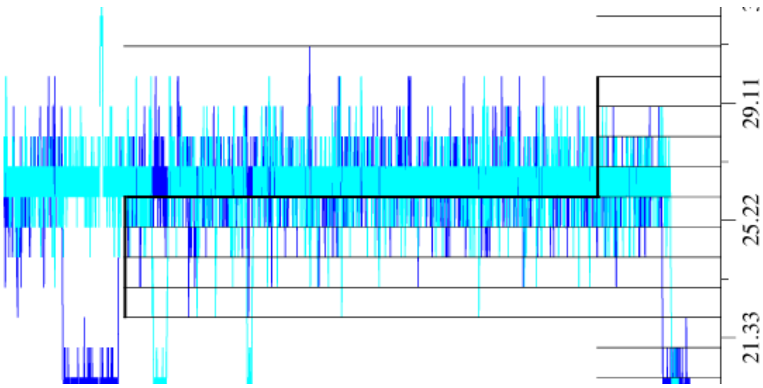
On a tracé sur le même graphique

- 2 courbes de S_n (en fait, ici n se situe en ordonnée et S_n en abscisse)
- l'allure de la fonction p (qui est à valeurs dans un ensemble à 2 éléments), commune aux deux courbes précédentes.

On obtient des graphiques de ce genre :



On observe alors un phénomène intéressant intervient lorsque p prend successivement plusieurs fois la valeur r, puis plusieurs fois la valeur q :



On se rend compte alors que la suite "accroche" sur ce genre de particularité du milieu, et plus particulièrement à la "droite" du saut.

Dans le prolongement de notre raisonnement de l'annexe C, on peut également s'interesser à la loi invariante π pour le cas des suites p définies par :

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p(k) = \frac{1}{6}$ et $\forall k \in -\mathbb{N}, p(k) = r$ avec différents r. La loi π vérifie alors : $\forall k \in \mathbb{Z}, \pi(k) = p(k-1)\pi(k-1) + p(k+1)\pi(k+1)$

- Dans le cas $r = 1$, après calculs, on trouve[7] $\pi(0) = \frac{2}{17}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \pi(k) = \frac{12}{17}5^{-k}$ ce qui donne numériquement $\pi(0) \approx 0,117$, $\pi(1) \approx 0,141$ et $\pi(2) \approx 0,028$, valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut. Pour les valeurs strictement négatives de k, $\pi(k) = 0$.
- Dans le cas où $r > \frac{1}{2}$, ce qui correspond aux cas qui nous interessent : $\pi(0) = 4\frac{1-2r}{5-10r}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \pi(k) = \pi(0)5^{-k}$ et $\pi(-k) = \pi(0)(\frac{r}{1-r})^{-k}$.
  La courbe représentative de π en fonction de k est symétrique pour $r = \frac{5}{6}$, ce qui n'est pas étonnant puisque $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, $\frac{5}{6}$ est donc le "symétrique" de $\frac{1}{6}$. Pour $r > \frac{5}{6}$ - *c'est-à-dire si "la gauche" renvoie plus fort que la droite* - la courbe de π diminue plus vite à gauche qu'à droite : "l'accrochage" a plutôt lieu à droite.

E Démonstration alternative de l'ordre de S_n

Soit ω vérifiant $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \in I$, où I est un intervalle ouvert. Alors, $\exists n_0 : \forall n \geqslant n_0, \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \in I$. Comme $\forall n \leqslant n_0, S_n \in [-n_0; n_0]$, on a $\forall n, \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \in I \cup [-\sqrt{n_0}; \sqrt{n_0}]$, c'est-à-dire $\left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right)_n$ est borné. Donc, $\forall I$ intervalle ouvert,

$$\left(\omega \text{ vérifie } \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \in I\right) \Longrightarrow \left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \text{ est borné}\right)$$

$\bigcup_{M\in\mathbb{R}^+} \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \in]-M; M[\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \text{ borné}\right\}$. Or, si nous supposons le "théorème de la limite centrale fort", on a $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \in]-m, m[\right) = \int_{-m}^{m} g(x)dx$ (où g est la densité normale). Donc, en passant à la probabilité, puis à la limite, on obtient : $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \text{ borné}\right) \geqslant \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} g(t)dt = 1$. D'où, $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_n$ est bornée presque sûrement.

$$\textit{Pour } p = \frac{1}{2},\ S_n \textit{ est de l'ordre de } \sqrt{n} \textit{ presque sûrement.}$$

[7] On obtient ce résultat en effectuant une récurrence d'ordre 2 à gauche et à droite. De chaque côté, on obtient comme solutions caractéristiques $r = 1$ et $r = r_0 < 1$. Comme π doit être normalisée, ne subsistent que les solutions proposées.